

MATEMATYKA

Lista 4 (szeregi liczbowe, granice funkcji)

Zad 1. Wyznacz sumę częściową S_n , a następnie oblicz sumę S szeregu

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$$

Zad 2. Sprawdź, czy spełniony jest warunek konieczny zbieżności szeregu

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n(n+1)}} \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin \frac{1}{n}\right)$$

Zad 3. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność następujących szeregów liczbowych

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{n}}}{n} \\ d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}}$$

Zad 4. Zbadaj zbieżność szeregów

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n!)^2}{(2n)!} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n n! \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}n^2}{(n+5)!} \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{\sqrt{n!}} \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n} \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(2n+1)} \\ i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n} \quad j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{2^n \cdot 3^{n+2}} \quad k) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^n \quad l) \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^n$$

Zad 5. Zbadaj zbieżność szeregów naprzemiennych oraz określ rodzaj ich zbieżności

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^3(\pi n + \pi)}{n\sqrt[3]{n^2}} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+n}$$

Zad 6. Oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2+1} \quad d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x) \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad f) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} \quad g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \quad h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \\ i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} \quad j) \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x-1}{x-e} \quad k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x} \quad l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin 5x}{5x} \\ m) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 3x}{x} + 1} \quad n) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \quad o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25^x-9^x}{5^x-3^x} \quad p) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2-x}) \\ r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2+3}{4x^2} \quad s) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}} \quad t) \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2-x+1} \quad u) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right)$$

Zad 7. Wyznacz granice jednostronne:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2-x-6}{(x+2)^2} \quad c) \lim_{x \rightarrow 3^+} 2^{\frac{1}{x-3}} \\ d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} \quad e) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2-x-6}{(x+2)^2} \quad f) \lim_{x \rightarrow 3^-} 2^{\frac{1}{x-3}}$$

Zad 8. Zbadaj istnienie granic:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

Zad 9. Wyznacz asymptoty funkcji:

$$a) f(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad b) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}} \\ c) f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} \quad d) f(x) = \frac{x}{\ln x}$$